

GIOCARE CON I NUMERI

Introduzione

L'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali, a prescindere dal tipo di notazione utilizzata per descriverli (qui useremo quella posizionale decimale), può essere definito mediante due semplici istruzioni:

1) il primo numero è 1

2) il successivo di un numero qualunque si ricava da esso aggiungendo 1

In questo modo, si può costruire la sequenza di tutti i numeri naturali sfruttando quella che è una delle caratteristiche fondamentali: l'ordinamento. In effetti, le istruzioni richiamano il concetto di *successivo* che ha senso solo se esiste un ordinamento e l'istruzione 2 si può assumere come definizione di *successivo* in \mathbf{N} (il gatto che si morde la coda?).

Utilizzando il linguaggio matematico usuale chiameremo una qualunque sequenza ordinata di numeri naturali **successione** e indicheremo con

- a_1 il primo numero della successione
- a_2 il secondo numero della successione
-
- a_n l'ennesimo numero della successione
- a_{n+1} è il successivo di a_n
- a_{n-1} è il precedente di a_n

La lettera a , o qualunque altra lettera utilizzata, indica un numero della successione ed il numero in pedice (*indice*) indica la posizione di tale numero nell'ordinamento. Così la scrittura

$$a_5 = 13$$

indica che il quinto numero della successione considerata è 13

Tornando alla definizione data dei numeri naturali, possiamo sintetizzare le due istruzioni scrivendo che

- 1) $a_1 = 1$
- 2) $a_{n+1} = a_n + 1$

Tale tipo di definizione è conosciuta come **definizione ricorsiva**.

Da osservare ancora che, solo per la sequenza dei numeri naturali, questo tipo di definizione confonde i numeri a (cardinali) con gli indici, essi stessi numeri naturali (ordinali) e pertanto abbiamo definito i numeri \mathbf{N} mediante loro stessi. Questo modo di procedere alla definizione di un oggetto utilizzando lo stesso oggetto (*autoreferenza*) non è logicamente corretto in quanto non fa riferimento a concetti precedenti già acquisiti: in conclusione non abbiamo definito niente!

Se accettiamo questo "inganno" tutte le considerazioni che seguiranno sono da ritenersi corrette.

Progressioni aritmetiche

Avendo dunque a disposizione l'insieme \mathbb{N} e le semplici regole di linguaggio dichiarate prima (ne introdurremmo altre più avanti, se necessario) possiamo cominciare a ... divertirci definendo qualche semplice successione.

Le prime che vengono in mente sono ben note:

$$1) d_1 = 1$$

$$2) d_{n+1} = d_n + 2$$

$$1) p_1 = 2$$

$$2) p_{n+1} = p_n + 2$$

definiscono la successione dei *numeri dispari* e quella dei *numeri pari*. Infatti, esplicitando i primi elementi della prima successione,

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = d_1 + 2$$

$$d_3 = d_2 + 2$$

$$d_4 = d_3 + 2$$

$$d_5 = \dots$$

$$d_2 = 1 + 2$$

$$d_3 = 1 + 2 + 2$$

$$d_4 = 1 + 2 + 2 + 2$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 3$$

$$d_3 = 5$$

$$d_4 = 7$$

$$d_5 = \dots$$

ci rendiamo conto di ottenere tutti i numeri dispari, ma possiamo anche notare che siamo in grado di determinare un qualsivoglia termine della successione dal primo termine utilizzando l'incremento dato a due termini consecutivi (nel nostro caso 2) e la posizione del termine cercato (n)

$$d_2 = d_1 + 2$$

$$d_2 = 1 + 2 \cdot 1$$

$$d_3 = d_2 + 2$$

$$d_3 = 1 + 2 \cdot 2$$

$$d_4 = d_3 + 2$$

$$d_4 = 1 + 2 \cdot 3$$

$$d_5 = \dots$$

e, dunque, in generale

$$d_n = d_1 + 2 \cdot (n - 1)$$

Quest'ultima può essere sostituita alla seconda relazione nella definizione della successione

$$1) d_1 = 1$$

$$2) d_n = d_1 + 2 \cdot (n-1)$$

e permette di rispondere subito alla domanda del tipo: qual è il 29° numero della successione? (evidentemente, $d_{29} = d_1 + 2 \cdot 29 = 1 + 58 = 59$).

Per la successione dei numeri pari basta cambiare il primo termine!

Si può osservare che, cambiando l'incremento dato a due termini consecutivi (chiamato **ragione**) si ottengono successioni diverse ma tutte con le stesse caratteristiche; queste particolari successioni vengono dette **progressioni aritmetiche**. In generale, una progressione aritmetica è definita dal primo termine e dalla relazione

$$a_n = a_1 + k \cdot (n-1)$$

dove k indica la ragione

Esercizi: Definire la progressione dei numeri pari. Costruire più progressioni aritmetiche cambiando il primo termine, poi la ragione, poi entrambi.

Progressioni geometriche

La semplice osservazione che nella legge ricorsiva che definisce le progressioni già viste si potrebbe pensare di **moltiplicare** per 2 (anziché sommare 2) porta ad una nuova famiglia di successioni chiamate **progressioni geometriche**.

$a_1 = 1$			$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 4$ $a_4 = 8$ $a_5 = \dots$
$a_2 = a_1 \cdot 2$	$a_2 = a_1 \cdot 2$		
$a_3 = a_2 \cdot 2$	$a_3 = a_1 \cdot 2 \cdot 2$	$a_3 = 4$	
$a_4 = a_3 \cdot 2$	$a_4 = a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$		
$a_5 = \dots$			

Questa volta la ragione (si chiama ancora così e viene indicata in generale con q) è moltiplicata $n-1$ volte per se stessa e per il primo termine (arbitrario anche se qui è fissato ad uno) e risultano evidenti sia la legge ricorsiva

$$a_1 = 1 \qquad a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 \qquad a_n = a_{n-1} \cdot q$$

che la legge naturale; con una ragione qualunque q

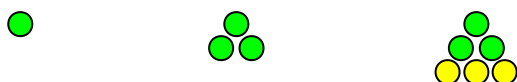
$$a_1 = 1 \qquad a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 \cdot 2^{(n-1)} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Da notare, infine, che si potrebbe pensare di costruire una progressione aritmetica **sottraendo** sempre lo stesso numero (o con **ragione negativa**) oppure **dividendo** per lo stesso numero (**ragione frazionaria**), ma si sconfinerebbe in successioni aventi per termini numeri interi (\mathbf{Z}) oppure razionali (\mathbf{Q}).

I numeri triangolari

Immaginiamo ora di avere un sacchetto pieno di monete tutte uguali e divertiamoci a disporle sul piano del banco in modo che formino una specie di triangolo. Dopo aver posato la prima moneta, ci rendiamo conto che ce ne servono tre per disporle a triangolo



e, per farne uno più grande, dobbiamo attaccarne altre tre sotto (in rosso). Risulta evidente che, se vogliamo costruire triangoli sempre più grandi, dobbiamo ora aggiungerne 4 sotto, poi 5, e così via.



Mantenendo, per comodità, il primo termine uguale a 1, possiamo scrivere la successione dei numeri che indicano la quantità di palline di ogni triangolo:

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = t_1 + 2$$

$$t_3 = t_2 + 3$$

$$t_4 = t_3 + 4$$

$$t_5 = \dots$$

$$t_2 = 1 + 2$$

$$t_3 = 1 + 2 + 3$$

$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 3$$

$$t_3 = 6$$

$$t_4 = 10$$

$$t_5 = \dots$$

ma, per come li abbiamo costruiti, anche la semplice legge che genera la successione che chiameremo successione dei **numeri triangolari**

1) $t_1 = 1$

2) $t_n = t_{n-1} + n$

è, ancora una volta, una legge ricorsiva!

La relazione non ricorsiva che definisce la successione dei numeri triangolari si può trovare notando che *ogni termine è dato dalla somma dei numeri naturali da 1 sino al suo indice!*

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

BOX 1

Carlo Federico Gauss (1777 – 1855), definito il “principe dei matematici”, è stato un matematico estremamente precoce.

Si narra che un giorno il maestro elementare abbia dato come esercizio ai bambini quello di calcolare la somma dei primi cento numeri naturali. Il piccolo Gauss rispose immediatamente alla richiesta e, davanti allo sbalordito maestro, spiegò: 1+100 fa 101, 2+99 fa 101, 3+98 fa 101, ... , queste somme sono 50 e quindi il risultato è $50 \cdot 101$, cioè 5050!

Tra i moltissimi contributi del giovane Gauss alla matematica (molti dei quali veramente importanti) trovò e dimostrò che:
“ogni numero naturale maggiore di 2 si può scrivere come somma di tre numeri triangolari”

Questa somma, calcolata dal famoso matematico Gauss quando era ancora un bambino (vedi box 1), è data da

$$t_n = \sum_{i=1}^n a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

Dunque la successione dei numeri triangolari si può definire con

- 1) $t_1 = 1$
- 2) $t_n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

ma si deve notare che il valore iniziale $t_1 = 1$ si ricava dalla relazione 2) che basta, da sola, a definire la successione. Inoltre, abbiamo utilizzato una procedura di **somma dei termini di una successione** che potremmo utilizzare ed analizzare in seguito.

BOX 2

La successione dei **primi 55 numeri triangolari** è:

<u>1</u> , <u>3</u> , <u>6</u> , <u>10</u> , <u>15</u> ,	<u>21</u> , <u>28</u> , <u>36</u> , <u>45</u> , <u>55</u> ,	<u>66</u> , <u>78</u> , <u>91</u> , 105, <u>120</u> ,
136, <u>153</u> , 171, 190, 210,	231, 253, 276, 300, 325,	351, 378, 406, 435, 465,
496, 528, 561, 595, 630,	<u>666</u> , 703, 741, 780, 820,	861, 903, 946, 990, 1035,
1081, 1128, 1176, 1225,	1275, 1326, 1378, 1431,

Esercizi: quante monete occorrono per costruire un triangolo di lato 9 monete? Se dispongo di 70 monete, qual è il triangolo più grande che posso costruire? Sapendo che $t_{999} = 499500$, quanto vale t_{1000} ?

I numeri quadrati

Riprendiamo il nostro sacchetto di monete e proviamo ora a disporle sul piano a formare dei quadrati. Il gioco ora è più facile e si vede subito cosa andiamo a scoprire:



il numero di monete necessario per costruire un quadrato di lato 2 è 4, se lo vogliamo di lato 3 ne occorrono 9 e così via! Ogni volta aggiungiamo al quadrato precedente le monete che formano il lato inferiore e quello laterale, tenendo conto che una moneta serve per entrambi i lati.

E' perciò evidente che la successione dei numeri delle monetine, mantenendo sempre per comodità anche la singola, è la seguente:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= q_1 + 3 \\ q_3 &= q_2 + 5 \\ q_4 &= q_3 + 7 \\ q_5 &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= 1 + 3 \\ q_3 &= 1 + 3 + 5 \\ q_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= 4 \\ q_3 &= 9 \\ q_4 &= 16 \\ q_5 &= \dots \end{aligned}$$

e la legge (ricorsiva) che individua la successione dei **numeri quadrati** è, per quanto detto,

- 1) $q_1 = 1$
- 2) $q_n = q_{n-1} + (2n-1)$

La relazione non ricorsiva che definisce la successione dei numeri quadrati è facile da determinare, sia dalla figura (area dei quadrati) che dagli elementi della successione (potenze seconde dei naturali).

Essa è

- 1) $q_1 = 1$
- 2) $q_n = n^2$

e, anche questa volta si può fare a meno del valore iniziale che si ottiene nella 2) ponendo $n = 1$

Osservando l'esplicitazione dei valori q_2, q_3, q_4, \dots nella colonna centrale, possiamo enunciare questa proprietà:

“il valore dell'ennesimo numero quadrato è uguale alla somma dei numeri dispari sino ad n ”

o, in simboli

$$q_n = \sum_{d=1}^n d_n = n^2$$

e, dunque, abbiamo trovato anche quanto vale la somma dei primi n numeri dispari proprio n^2 (per la dimostrazione vedi box 3)

BOX 3

Dimostriamo che *“il valore dell'ennesimo numero quadrato è uguale alla somma dei numeri dispari sino ad n ”* ossia che

$$q_n = \sum_{d=1}^n d_n = n^2$$

La somma dei numeri dispari, utilizzando la definizione della successione dei dispari, è data da

$$\begin{aligned} & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_n = \\ & = d_1 + [d_1 + 2 \cdot 1] + [d_1 + 2 \cdot 2] + [d_1 + 2 \cdot 3] + \dots + [d_1 + 2 \cdot (n-1)] = \\ & = [d_1 + d_1 + d_1 + \dots + d_1] + [2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (n-1)] = \\ & = d_1 \cdot n + 2 \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] \end{aligned}$$

Ma $d_1 = 1$ e la somma dei primi $n-1$ numeri naturali si può trovare con la relazione di Gauss sostituendo a n il numero $n-1$, trovando $\frac{1}{2}(n-1)n$ per cui

$$= 1 \cdot n + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n + (n-1) \cdot n = n + n^2 - n = n^2$$

che proprio il valore del numero quadrato q_n

Esercizi: quante monete occorrono per costruire un quadrato di lato 12? Qual è il quadrato più grande che si può costruire con 625 monete? E con 670? Dimostrare algebricamente che la somma di due numeri triangolari successivi è uguale al numero quadrato del più grande, ossia

$$t_{n-1} + t_n = q_n$$

e verificarlo anche con le monete.

BOX 4

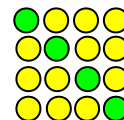
La successione dei **primi 40 numeri quadrati** è:

<u>1</u> , <u>4</u> , <u>9</u> , <u>16</u> , <u>25</u> ,	<u>36</u> , <u>49</u> , <u>64</u> , <u>81</u> , <u>100</u> ,	<u>121</u> , <u>144</u> , <u>169</u> , 196, <u>225</u> ,
256, 289, 324, 361, 400,	441, 484, 529, 576, 625	676, 729, 784, 841, 900,
961, 1024, 1089, 1156, 1225,	1296, 1369, 1444, 1521, 1600,

Una particolare relazione tra i due tipi di numeri che abbiamo studiato è

$$q_n = 2 t_{n-1} + n$$

Essa si può visualizzare con le monete e, naturalmente, dimostrarla in modo algebrico. Infatti, ragionando su un esempio, si vede che una configurazione quadrata è formata da due configurazioni triangolari di un ordine inferiore più le monete della diagonale che sono in numero uguale al lato del quadrato. Per la dimostrazione algebrica basta utilizzare le due definizioni non ricorsive per verificare la proprietà



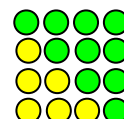
$$n^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} (n - 1) n + n$$

$$n^2 = n^2 - n + n$$

Altra particolare relazione è

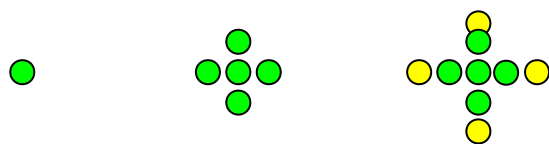
$$q_n = t_{n-1} + t_n$$

Anche questa si può visualizzare con le monete e, naturalmente, dimostrarla in modo algebrico. Infatti, ragionando su un esempio, si vede che una configurazione quadrata è formata da due configurazioni triangolari, una dello stesso ordine e l'altra di un ordine inferiore. Per la dimostrazione algebrica basta utilizzare le due definizioni non ricorsive per verificare la proprietà



I numeri crociati

Essendo ormai esperti in ... monetine, procediamo speditamente a definire la successione dei numeri che si ottengono disponendo a croce (greca) le nostre monete.



Abbiamo che

$$\begin{aligned}c_1 &= 1 \\c_2 &= c_1 + 4 \\c_3 &= c_2 + 4 \\c_4 &= c_3 + 4 \\c_5 &= \dots\end{aligned}$$

$c_1 = 1$
$c_2 = 5$
$c_3 = 9$
$c_4 = 13$
$c_5 = \dots$

e risulta evidente che la successione dei **numeri crociati** è una *progressione aritmetica* di primo termine 1 e di *ragione* 4; per quanto visto precedentemente, essa è definita da

- 1) $c_1 = 1$
- 2) $c_n = c_1 + 4 \cdot (n-1)$

La somma dei termini di una progressione aritmetica

Viste le osservazioni precedenti sulla somma dei termini di una successione, diventa interessante indagare se è possibile esprimere tale somma per una progressione aritmetica di ragione d qualunque. Ebbene, quello che si scopre (vedi box 5) è che tale somma è semplicemente *la media aritmetica tra il primo e l' n-esimo termine (semisomma) moltiplicata per n (il numero dei termini)*. Col nostro linguaggio

$$\sum_{i=1}^n a_n = \frac{1}{2} (a_1 + a_n) \cdot n$$

Poiché abbiamo già trovato che il termine n-esimo si può esprimere mediante la ragione come $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

sostituendo nella somma precedente otteniamo

$$\sum_{i=1}^n a_n = \frac{1}{2} [a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)] \cdot n = \frac{1}{2} [2a_1 + d \cdot (n-1)] \cdot n$$

$$\sum_{i=1}^n a_n = [a_1 + \frac{1}{2} d (n-1)] \cdot n$$

che è l'espressione della somma *tramite il solo valore iniziale a_1 , la ragione d e la posizione n* . In particolare, ritroviamo (provare per credere!)

- la somma dei primi n numeri **naturali** come progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 1 [$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$]
- la somma dei primi n numeri **naturali dispari** come progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 2 [n^2]
- la somma dei primi n numeri **naturali pari** come progressione aritmetica di primo termine 2 e ragione 2 [$n \cdot (n + 1)$]
- la somma dei primi n numeri **crociati** come progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 4 [$(2n - 1) \cdot n$]

BOX 5

Osserviamo innanzitutto che “la somma di due termini qualsiasi equidistanti dagli estremi di una progressione aritmetica di ragione k è uguale alla somma degli estremi” ossia che, se $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sono i primi n termini della progressione, si ha (con $s < n$)

$$a_1 + s k = a_n - s k$$

Allora, ragionando come il piccolo Gauss, possiamo vedere che la somma S cercata si trova

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \text{ma anche}$$

$$S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

da cui, sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ossia, n somme tra parentesi tutte uguali a quella tra il primo e l'ultimo termine. In conclusione,

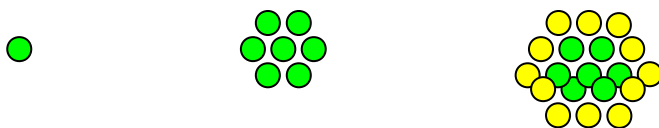
$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n$$

e, dunque,

$$S = \frac{1}{2} (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{come volevamo dimostrare.}$$

I numeri esagonali

Più complicata sembra la costruzione della successione che otteniamo disponendo le monete ad esagono.



Andando per tentativi, riusciamo però a scoprire che

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = e_1 + 6 \quad e_2 = e_1 + 6 \cdot 1$$

$$e_3 = e_2 + 12 \quad e_3 = e_2 + 6 \cdot 2$$

$$e_4 = e_3 + 18 \quad e_4 = e_3 + 6 \cdot 3$$

$$e_5 = \dots$$

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = 7$$

$$e_3 = 19$$

$$e_4 = 37$$

$$e_5 = \dots$$

e questo ci permette di scrivere la legge ricorsiva dei **numeri esagonali**

