

## INTRODUZIONE

Questo studio è nato da una particolare lezione tenuta in una classe quarta del Tecnico Commerciale IGEA nella quale, come fortunatamente ancora succede, alcuni studenti hanno fatto delle osservazioni interessanti e delle domande critiche sul fatto che certe funzioni hanno la tendenza a occupare la parte alta o la parte bassa del piano cartesiano.

La discussione che ne è seguita, sulla relatività dei termini *alto e basso* e sul possibile significato che possono assumere nel contesto dell'argomento trattato, ha fatto germinare l'idea che ha portato a questo lavoro.

L'occasione per attivare la ricerca è scaturita dal progetto di un convegno sul matematico Cesare Arzelà, di cui portano il nome il nostro Istituto Tecnico Commerciale e Turistico di Sarzana (SP) e l'Istituto Comprensivo di Santo Stefano Magra (SP), con l'obiettivo (oltre alla celebrazione dell'illustre) di fare il punto sulla situazione della didattica della matematica nella scuola superiore italiana.

**Alla questione se sia ancora possibile sviluppare metodi e modelli logico-matematici con contenuti originali nel modo di proporre la didattica in classe in un Istituto Tecnico, abbiamo inteso rispondere *provando*.**

E' nato così un gruppo di lavoro formato da otto studenti volontari delle classi quarte IGEA, aventi prerequisiti sufficienti per il compito da svolgere, e dal sottoscritto, docente di matematica, in stretto contatto coi loro insegnanti; il gruppo, in ore curricolari, ha portato avanti un progetto disciplinare di eccellenza con lo scopo sopra esposto.

Il metodo di lavoro, probabilmente chiave del successo, è stato dichiarato esplicitamente sin dal primo incontro:

- si tratta di un gruppo *alla pari* dove ciascuno, docente compreso, offre il suo contributo alla discussione con osservazioni, domande, dubbi, suggerimenti e ogni altra cosa *senza dover temere alcun giudizio sommario degli altri*.
- non vengono posti limiti al compito prefissato, né in quantità né sul tipo di sviluppo che avrà la ricerca.
- la discussione, i tentativi ed i risultati degli incontri sono appuntati in un *diario* dagli studenti, a turno, in attesa di revisione e messa in bella copia.
- l'intervento dell'insegnante è volutamente limitato ai momenti in cui le competenze richieste sono di livello più elevato.
- le bozze vengono revisionate più volte con modifiche anche significative.

In questo quadro, è apparso subito necessario anche un riferimento autorevole che, da una posizione esterna, potesse indirizzare, criticare e dare suggerimenti per lo svolgimento della ricerca didattica. E' parso naturale rivolgersi a chi è preposto proprio a questo, nella fattispecie al prof. Paolo Gentilini dell'IRRE di Genova, il quale si è mostrato disponibile a questo compito e si è addossato l'onere di supervisore.

Il gruppo di lavoro della ricerca è formato dagli studenti Nicola Bertola e Massimiliano Emili (classe 4A), Deborah Beverini, Carlotta Filippo, Francesca Marchini, Valentina Monaco, Laura Mulattieri e Simon Silvaggio (classe 4B)

**L'obiettivo** pattuito e dichiarato sin dal primo momento col gruppo di lavoro è stato quello di sperimentare come si possa

- definire un oggetto matematico o una proprietà matematica in un certo contesto, in questo caso lo studio delle funzioni ad una variabile reale
- dedurre dalla definizione data delle conseguenze logiche, altre definizioni, proprietà
- ricercare quali funzioni elementari e sotto quali condizioni godono di questa proprietà
- ampliare lo studio ad altri oggetti o proprietà ricercandone i legami logico-deduttivi
- rappresentare le conclusioni con modelli consueti

il tutto **a prescindere dalle possibili applicazioni e dai possibili significati** della trattazione svolta e mantenendo esclusivamente **la coerenza con il contesto**.

Inoltre, non si sono posti limiti ai possibili sviluppi della ricerca, né di tipo quantitativo né sulla direzione da seguire e tantomeno ai possibili traguardi da raggiungere. L'unica attenzione che è stata sempre presente è la correttezza logica delle affermazioni e delle dimostrazioni svolte.

**L'idea iniziale** è quella di definire una proprietà che rispecchi l'impatto visivo del grafico di una funzione a variabili reali nel caso in cui, relativamente al sistema di assi cartesiani, esso mostri archi di curva *alti o bassi*. Questi due attributi, utilizzati nel linguaggio orale a volte approssimato durante le lezioni di geometria analitica e di analisi, non hanno significato se non quello intuitivo di vedere o

disegnare porzioni di curva nella parte più in alto o più in basso del riferimento cartesiano a disposizione. Essi vengono talvolta usati per far comprendere più efficacemente la posizione di una retta, una parabola o altra funzione elementare al variare dei parametri della curva.

Poiché nel corso dei lavori risulta necessario richiamare concetti, oggetti e proprietà studiate nel corso degli anni precedenti, il gruppo ha pensato di rivisitare in maniera estremamente sintetica tali argomenti e fissarli in richiami opportuni denominati **BOX**, in modo che sia per gli studenti che per chi legge vi sia un riferimento utilizzabile immediatamente.

L'insegnante, nell'ottica di un interesse puramente didattico che il lavoro può suscitare in chi lo legge (si suppone principalmente colleghi docenti), ha previsto l'inserimento di note di lavoro denominate **NOTE DIDATTICHE** con le quali illustrare la scena ed i retroscena che hanno accompagnato questo studio, naturalmente negli aspetti ritenuti più qualificanti dal punto di vista metodologico-didattico.

Sarzana, 7 giugno 2004

Prof. Nello Sanguinetti.

## PARTE PRIMA: LA DEFINIZIONE

Definito il contesto nel quale operare, si comincia col tentativo di dare una definizione soddisfacente della proprietà che si vuol evidenziare

**CONTESTO :** Sia  $Y = f(X)$  una funzione a variabili reali e sia  $D$  il suo dominio

DEFINIZIONE 1: Si dice che  $f(X)$  è una funzione *ALTA* in un suo punto di ascissa  $X_0 \in D$  se

$$f(X_0) > X_0$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA :

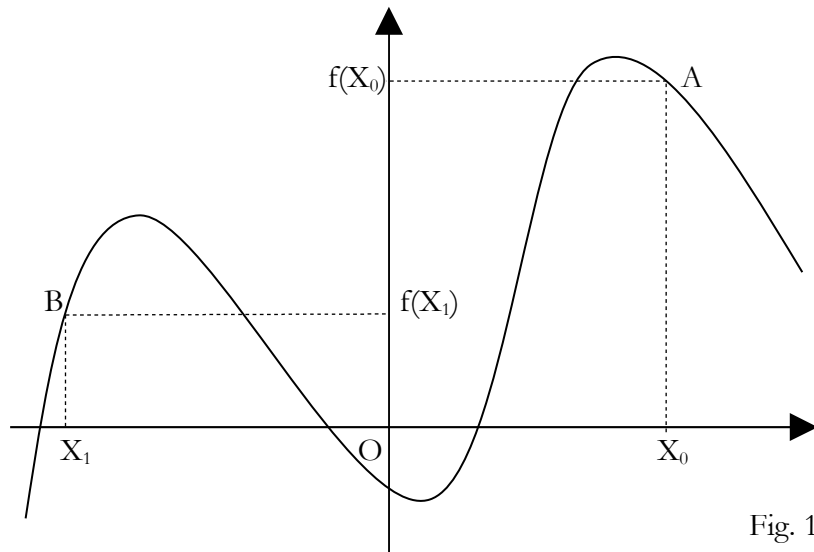


Fig. 1

L'analisi del grafico in Fig. 1 permette di osservare subito che la funzione è *ALTA* nel punto  $A(X_0, f(X_0))$ , come si voleva

ottenere, ma ANCHE nel punto  $B(X_1, f(X_1))$  : infatti, è evidente che non solo  $f(X_0) > X_0$  ma si ha  $f(X_1) > X_1$  in quanto, nonostante il segmento  $Of(X_1)$  sia minore del segmento  $OX_1$ , risulta  $X_1 < 0$  !

**BOX 1**

**Valore assoluto:**  $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

**PROPRIETA'**

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$  (disug. triangolare)

$|a + b| = |a| + |b|$  se  $a > 0$  e  $b > 0$   
oppure  $a < 0$  e  $b < 0$   
(numeri concordi)

La situazione grafica suggerisce pertanto di modificare la definizione in modo che sia adeguata anche nel secondo caso; questo si può ottenere introducendo le **misure dei segmenti** in questione, ossia i **valori assoluti** delle coordinate.

Inoltre è naturale estendere la definizione al caso in cui risulta opposta la disuguaglianza.

**DEFINIZIONE 2:** Si dice che  $f(X)$  è una funzione *ALTA* in un suo punto di ascissa  $X_0 \in D$  se

$$|f(X_0)| > |X_0|$$

Si dice che  $f(X)$  è una funzione *BASSA* in un suo punto di ascissa  $X_0 \in D$  se

$$|f(X_0)| < |X_0|$$

A questo punto, come volevamo, risulta (vedi Fig. 1) che la funzione è *ALTA* punto  $A(X_0, f(X_0))$  ed è *BASSA* nel punto  $B(X_1, f(X_1))$ .

Il passo seguente è quello di capire in quali punti succede che  $|f(X_0)| = |X_0|$ ; poiché l'uguaglianza, dopo aver sviluppato il valore assoluto, riconduce ai casi noti

$$f(X_0) = X_0 \quad \text{e} \quad f(X_0) = -X_0$$

espressi nella forma più comune

$$Y_0 = X_0 \quad \text{e} \quad Y_0 = -X_0$$

la condizione indica l'appartenenza dei punti ad una delle bisettrici dei quadranti (Fig. 2).

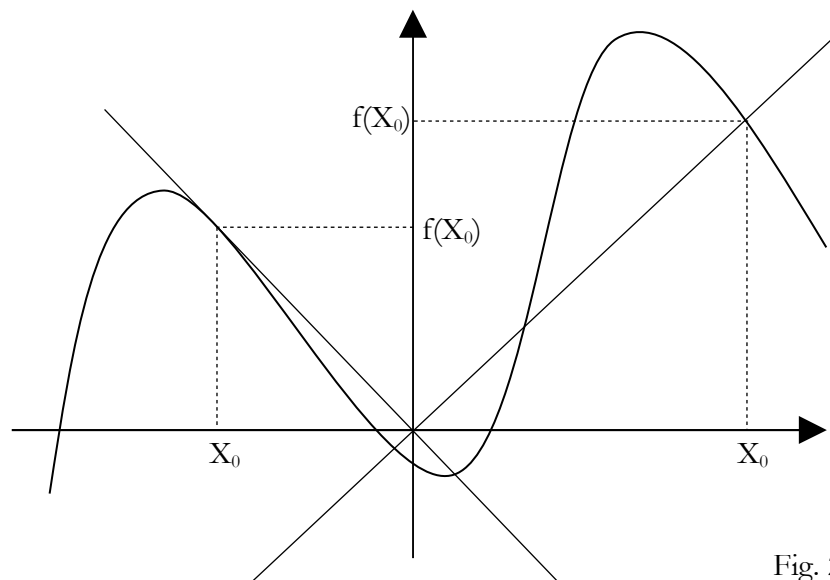


Fig. 2

A questo punto è d'obbligo un'altra definizione:

DEFINIZIONE 3: Data la funzione  $Y = f(X)$  avente dominio  $D$ , i punti  $X_0 \in D$  per i quali risulta  $|f(X_0)| = |X_0|$  si dicono *PUNTI NEUTRI* <sup>(1)</sup>.

Inoltre, si può estendere la proprietà della definizione 2 ad un intervallo mediante la

DEFINIZIONE 4: Una funzione  $Y = f(X)$  è *ALTA* in un intervallo  $I \subseteq D$  se è *ALTA* in tutti i punti  $X_0 \in I$  <sup>(2)</sup>

Per analizzare come le due rette bisettrici siano le discriminanti per la proprietà definita, si possono utilizzare i tradizionali procedimenti algebrici applicandoli alle relazioni di definizione. <sup>(3)</sup> La disequazione  $|f(X_0)| > |X_0|$  porta ai seguenti casi:

1. se  $X > 0$  e  $f(X) > 0$  (1° quadrante) si ha la disequazione  $f(X_0) > X_0$  che indica i punti della funzione che si trovano sopra la bisettrice  $Y = X$
2. se  $X < 0$  e  $f(X) > 0$  (2° quadrante) si ha la disequazione  $f(X_0) > -X_0$  che indica i punti della funzione che si trovano sopra la bisettrice  $Y = -X$
3. se  $X < 0$  e  $f(X) < 0$  (3° quadrante) si ha la disequazione  $-f(X_0) > -X_0$  ossia  $f(X_0) < X_0$  che indica i punti della funzione che si trovano sotto la bisettrice  $Y = X$
4. se  $X > 0$  e  $f(X) < 0$  (4° quadrante) si ha la disequazione  $-f(X_0) > X_0$  ossia  $f(X_0) < -X_0$  che indica i punti della funzione che si trovano sotto la bisettrice  $Y = -X$

Si può procedere analogamente per la condizione  $|f(X_0)| < |X_0|$ .

I risultati dell'analisi si possono riassumere (vedi Fig. 3) dicendo che:

"una funzione è *ALTA* quando il suo grafico è contenuto nelle due zone di piano individuate dalle bisettrici e contenenti l'asse Y e, viceversa, una funzione è *BASSA* quando il suo grafico è contenuto nelle due zone di piano individuate dalle bisettrici e contenenti l'asse X (punti delle bisettrici esclusi!)."

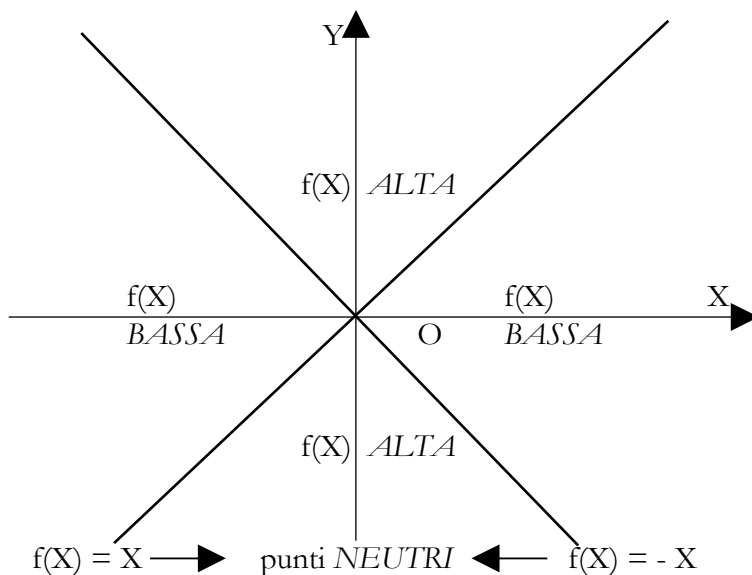


Fig. 3

Da notare come la continuità della funzione non sia necessaria nella definizione di una funzione *ALTA* o *BASSA*. Ad esempio, la classica *funzione a gradini parte intera di X*

$f(X) = [X]$  che vale  $n$  per  $n \leq X < n+1$  con  $n \in \mathbf{Z}$   
 risulta avere infiniti punti di discontinuità che sono *NEUTRI* per la  
 funzione (ogni volta che  $X = n$  si ha  $f(n) = n$ ), è *BASSA* per tutti i  
 valori di  $X > 0$  e *ALTA* per i valori di  $X < 0$ .

Basta modificarla di poco e la funzione (vedi Fig. 4)

$f(X) = [X] + 1$   
 risulta *ALTA* per tutti i valori di  $X \geq 0$  e *BASSA* per i valori di  
 $X < 0$ , **compresi i punti di discontinuità!**

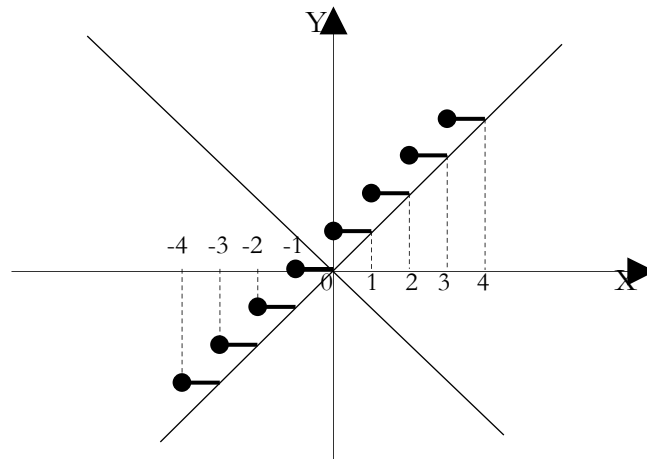


Fig. 4

## PARTE SECONDA: L'APPLICAZIONE

### BOX 2

Elenco delle **funzioni elementari** a variabili reali del tipo  $Y = f(X)$

$Y = K$	$Y = a^X$	$Y = \sqrt[n]{X}$
$Y = X$	$Y = e^X$	$Y = 1/X$
$Y = X^2$	$Y = \text{Log}_a X$	$Y = \text{sen} X$
$Y = X^3$	$Y = \ln X$	$Y = \text{cos} X$
$Y = X^n$	$Y = \sqrt{X}$	$Y = \text{tg} X$
$Y =  X $		

Cerchiamo ora di determinare quando e con quali condizioni le **funzioni elementari** studiate godono della proprietà di essere *ALTE* o *BASSE* e quali siano i loro punti *NEUTRI*

Iniziamo lo studio dalla funzione *costante*  $Y = K$

- Intanto, se  $K=0$  la funzione è  $Y=0$  (eq. dell'asse  $X$ ) che risulta essere *BASSA* per tutti gli  $X$  tranne che per  $X=0$ , ossia l'origine degli assi, che è un punto *NEUTRO*
- Per ogni altro valore di  $K$ , la funzione *costante* ha due punti *NEUTRI*  $A(-K, K)$  e  $B(K, K)$  <sup>(4)</sup> e risulta *ALTA* quando  $|f(X)| > |X|$ , cioè  $|K| > |X|$ , e questo avviene <sup>(5)</sup> per i valori di  $X$  compresi tra  $-K$  e  $K$  (vedi Fig. 5)

Si può incidentalmente osservare che l'asse  $Y$  è una retta sempre *ALTA* tranne che per  $X=0$  e ribadire che le rette bisettrici  $Y = X$  e  $Y = -X$  risultano formate da tutti e solo punti *NEUTRI*.

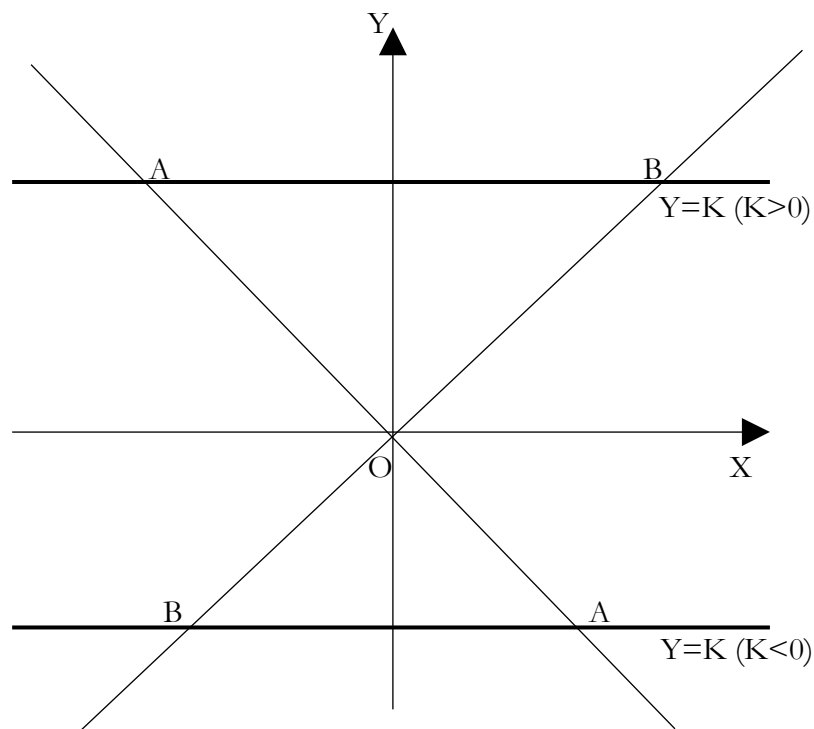


Fig. 5

Se proviamo ad applicare la proprietà alla funzione più generale  $Y = m X$  (retta passante per l'origine) si ottiene il seguente

---

**TEOREMA 1:** se  $|m| > 1$  allora  $Y = m X$  è una funzione *ALTA*  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; se  $|m| < 1$  con  $m \neq 0$  allora è una funzione *BASSA*  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$  ed ha l'origine come unico punto *NEUTRO*; se  $|m| = 1$  allora  $Y = m X$  è una funzione *NEUTRA*  $\forall x \in \mathbb{R}$

---

**Dim. :** Pur essendo il teorema completamente intuitivo dimostriamolo algebricamente<sup>(6)</sup> osservando che, se si vuole che la funzione sia *ALTA* deve risultare  $|mX| > |X|$  che, per una proprietà del valore assoluto (vedi BOX 1), si può scrivere  $|m| \cdot |X| > |X|$

In questa disuguaglianza

- se  $X \neq 0$  si possono dividere entrambi i membri per  $|X|$  e si ha la disuguaglianza equivalente  $|m| > 1$  che è la condizione della tesi
- se  $X = 0$  la relazione non è valida ma risulta  $|mX| = |X| \forall m$ , ossia  $X = 0$  è un punto *NEUTRO*

Analogamente per la condizione opposta.

Nel caso particolare  $|m| = 1$ , cioè  $m = \pm 1$ , si ottengono le due bisettrici che, come già osservato, sono formate da tutti e soli i punti *NEUTRI*. ♦

Analizziamo ora due funzioni potenza <sup>(7)</sup>:  $Y = X^2$  (Fig. 6)

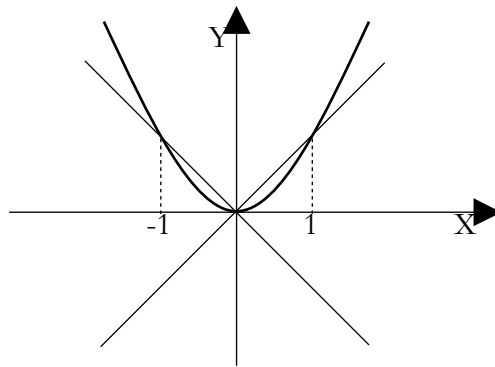


Fig. 6

Risolvendo la disequazione  $|X^2| > |X|$  si ricava che:

- la funzione interseca le due bisettrici in  $-1, 0, 1$  che sono dunque i suoi punti *NEUTRI*

- la funzione è *ALTA*  $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- la funzione è *BASSA*  $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

**Dim.** : Affinché la funzione sia *ALTA* deve essere  $|X^2| > |X|$  o anche (poiché  $X^2 > 0$ )  $X^2 > |X|$   
 Quest'ultima disuguaglianza, sciogliendo il valore assoluto, è vera nei due casi

$$\begin{cases} X > 0 \\ X^2 > X \end{cases} \qquad \begin{cases} X < 0 \\ X^2 > -X \end{cases}$$

$$\begin{cases} X > 0 \\ X^2 - X > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X < 0 \\ X^2 + X > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X > 0 \\ X < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X < 0 \\ X < -1 \end{cases}$$



L'unione dei due intervalli porta alle soluzioni  $X < -1$  e  $X > 1$  come affermato nella tesi.

Analogamente per le altre due conclusioni.  $\blacklozenge$

**Y = X<sup>3</sup>** (Fig. 7) Risolvendo la disequazione  $|X^3| > |X|$  si ricava che:

- la funzione interseca le due bisettrici in  $-1, 0, 1$  che sono dunque i suoi punti *NEUTRI*
- la funzione è *ALTA*  $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- la funzione è *BASSA*  $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

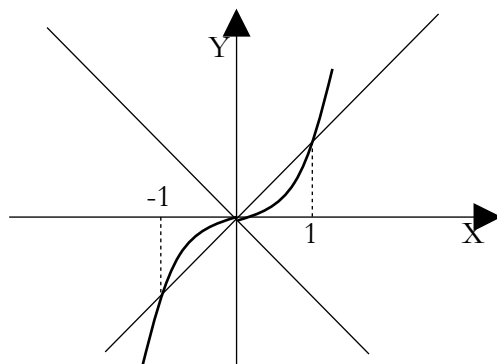


Fig. 7

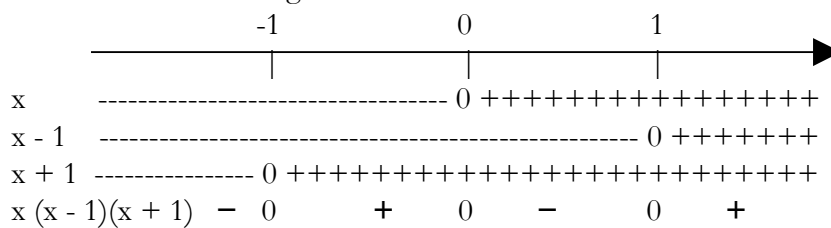
**Dim. :** Affinché la funzione sia *ALTA* deve essere  $|X^3| > |X|$   
 La disuguaglianza, sciogliendo il valore assoluto, è vera nei due casi

$$\begin{cases} X > 0 \\ X^3 > X \end{cases} \qquad \begin{cases} X < 0 \\ -X^3 > -X \end{cases}$$

$$\begin{cases} X > 0 \\ X^3 - X > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X < 0 \\ -X^3 + X > 0 \end{cases}$$

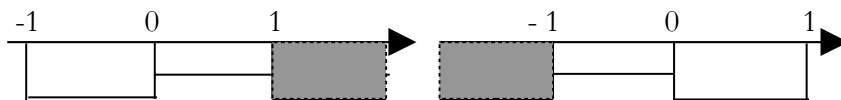
$$\begin{cases} X > 0 \\ X(X-1)(X+1) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X < 0 \\ X(X-1)(X+1) < 0 \end{cases}$$

Studiando il segno dei tre fattori



I due sistemi diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0 \\ -1 < X < 0 \end{array} \right. \quad X > 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} X < 0 \\ X < -1 \end{array} \right. \quad 0 < X < 1$$



L'unione delle due soluzioni porta ancora a quanto affermato nella tesi: la funzione è *ALTA* per  $X < -1$  e  $X > 1$  Analogamente per le altre due conclusioni. ♦

Sembra ora proponibile il teorema che decreta le condizioni per cui risulta *ALTA* o *BASSA* la funzione potenza  $Y = X^n$

---

**TEOREMA 2:**  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ , la funzione  $Y = X^n$

- ha per punti *NEUTRI*  $X \in \{-1, 0, 1\}$
- è *ALTA* per  $X \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- è *BASSA* per  $X \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

---

**Dim.:** I punti *NEUTRI* della funzione sono tali che  $|X^n| = |X|$  uguaglianza che dà luogo alle due equazioni  $X^n = X$  e  $X^n = -X$  (e alle due equivalenti  $-X^n = X$  e  $-X^n = -X$ ) <sup>(8)</sup>

La prima ha come soluzioni  $X = 0$  e quelle di  $X^{n-1} = 1$ , ossia

$$X = 1 \quad (\text{se } n-1 \text{ dispari})$$

$$X = \pm 1 \quad (\text{se } n-1 \text{ pari})$$

La seconda ha come soluzioni  $X = 0$  e quelle di  $X^{n-1} = -1$ , ossia

$$X = -1 \quad (\text{se } n-1 \text{ dispari})$$

Quindi, i punti *NEUTRI* sono  $X = -1, 0, 1$  sia per  $n-1$  pari ( $n$  dispari) che per  $n-1$  dispari ( $n$  pari).

Se vogliamo che  $Y = X^n$  sia *ALTA* allora deve accadere che  $|f(X)| > |X|$  o, equivalentemente,  $|X^n| > |X|$  che si può scindere in due casi: <sup>(9)</sup>

- 1)  $X > 0$  : allora anche  $X^n > 0$  e la tesi diventa  $X^n > X$  da cui  $X^n - X > 0$  e quindi  $X(X^{n-1} - 1) > 0$  Questo significa che dovrà risultare  $X^{n-1} - 1 > 0$  (poiché  $X > 0$ ) o anche  $X^{n-1} > 1$

Questa è una disequazione binomia e la sua risoluzione passa attraverso l'esame del grado (vedi BOX 3) per cui la condizione iniziale è verificata

**Se n-1 è dispari** quando  $X > \sqrt[n-1]{1}$   
ossia  **$X > 1$**

**Se n-1 è pari** quando  $X < -\sqrt[n-1]{1}$  o  $X > \sqrt[n-1]{1}$   
ossia  **$X < -1$   $X > 1$**

- 2)  $X < 0$  allora si deve avere  $|X^n| > -X$  da cui:

Se n è pari  $X^n > 0$  e la disequazione diventa  $X^n > -X$  poi  $X^n + X > 0$  e quindi  $X(X^{n-1} + 1) > 0$  Questo significa che dovrà risultare  $X^{n-1} + 1 < 0$  (poiché  $X < 0$ ) o anche  $X^{n-1} < -1$  con **n-1 dispari**. Quindi, la condizione perché la funzione sia *ALTA* risulta essere

$X < \sqrt[n-1]{-1}$   
ossia  **$X < -1$**

Se n è dispari  $X^n < 0$  e la disequazione diventa  $-X^n > -X$  poi  $X^n < X$  e quindi  $X^n - X < 0$  o anche  $X(X^{n-1} - 1) < 0$  Questo significa che dovrà essere vero che  $X^{n-1} - 1 > 0$  (poiché  $X < 0$ ) e cioè  $X^{n-1} > 1$

con **n-1 pari**. Ancora una volta si ottiene come condizione

$$X > \sqrt[n-1]{1}$$

ossia **X < -1 X > 1**

In conclusione, la funzione risulta *ALTA* per  $X < -1$   $X > 1$  sia quando n-1 è pari (n dispari) che quando n-1 è dispari (n pari). Analogamente si dimostra l'ultima affermazione. ♦

<b>BOX 3</b>	
<b>DISEQUAZIONI BINOMIE</b>	<b>X<sup>n</sup> &gt; a</b>
Se n è dispari ha per soluzioni	$X > \sqrt[n]{a}$
Se n è pari ha per soluzioni	$\begin{matrix} \rightarrow X < -\sqrt[n]{a} & X > +\sqrt[n]{a} & \text{se } a > 0 \\ \rightarrow \forall X \in \mathbf{R} & & \text{se } a < 0 \end{matrix}$
	<b>X<sup>n</sup> &lt; a</b>
Se n è dispari ha per soluzioni	$X < \sqrt[n]{a}$
Se n è pari ha per soluzioni	$\begin{matrix} \rightarrow -\sqrt[n]{a} < X < +\sqrt[n]{a} & \text{se } a > 0 \\ \rightarrow \text{Nessuna soluzione} & \text{se } a < 0 \end{matrix}$

Cosa si può dire di una funzione  $Y = f(X)$   
continua e *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$ ? <sup>(10)</sup>

Si dimostrano le seguenti proposizioni:

**TEOREMA 3:** Se  $Y = f(X)$  è continua e *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$  allora  
 $f(X) > 0 \forall X$  oppure  $f(X) < 0 \forall X$

**Dim.:** Poiché per ipotesi la funzione è *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$  si ha  $\forall X$   
 $|f(X)| > |X|$

Supponiamo, **per ipotesi assurda**, che esista un  $\alpha \in (a, b)$   
 tale che si abbia  $f(X) > 0 \forall X \in (a, \alpha)$  e  $f(X) < 0 \forall X \in (\alpha, b)$   
 Allora, poiché la funzione è continua in  $(a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(X) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(X) = f(\alpha)$$

e  $f(\alpha) \neq 0$  (se fosse  $f(\alpha) = 0$  la funzione non sarebbe *ALTA* in  $\alpha$ );  
 per il teorema della permanenza del segno si avrebbe in  $(a, \alpha)$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(X) = f(\alpha) > 0$$

e in  $(\alpha, b)$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(X) = f(\alpha) < 0$$

che è palesemente assurdo. Quindi  $\forall X \in (a, b)$  si deve avere o  
 $f(X) > 0$  o  $f(X) < 0$ .

Poiché questo vale per qualunque intervallo  $(a, b)$  e la funzione è  
 continua in tutto  $\mathbf{R}$  la tesi è dimostrata per tutti gli  $X \in \mathbf{R}$ . ♦

La condizione di continuità della funzione appare qui  
 essenziale perché sia vera la tesi. Infatti, se consideriamo per  
 esempio la funzione

$$Y = X + 1/X \quad (\text{vedi Fig. 8})$$

essa risulta continua in tutto  $\mathbf{R} - \{0\}$ .

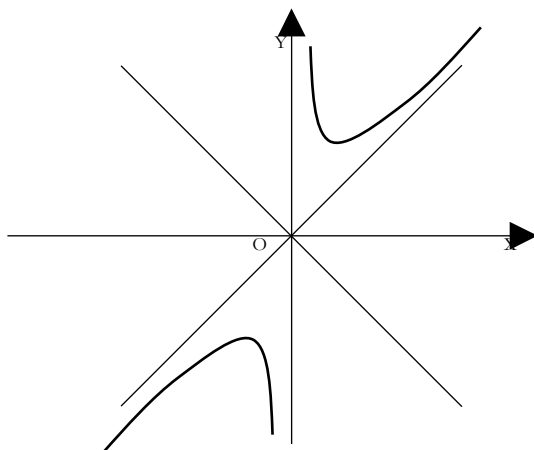


Fig. 8

La funzione è *ALTA* in  $\mathbf{R} - \{0\}$  ma non ha lo stesso segno in tutto  $\mathbf{R} - \{0\}$ ! Più precisamente, risulta

$$f(x) < 0 \text{ per } x < 0$$

$$f(x) > 0 \text{ per } x > 0$$

Da notare che il teorema vale invece nei due intervalli in cui il punto di discontinuità divide il dominio, in ciascuno dei quali la funzione risulta continua.

Anche l'ipotesi di essere *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$  è necessaria. Se prendiamo la funzione  $Y = 2X$  che è continua in tutto  $\mathbf{R}$  ma *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$  **tranne che per  $X = 0$** , essa risulta positiva per  $X > 0$  e negativa per  $X < 0$  (vedi Fig. 9).

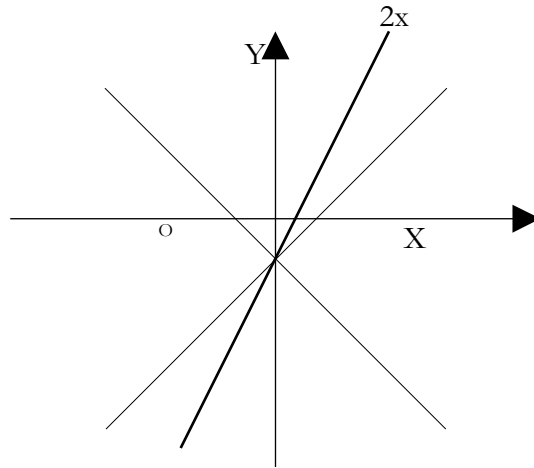


Fig. 9

---

**TEOREMA 4:** Se  $Y = f(X)$  è continua e *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$  allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(X)| = \infty$$


---

**Dim.:** Poiché per ipotesi la funzione è *ALTA* in tutto  $\mathbf{R}$  si ha  $\forall X$   
 $|f(X)| > |X|$

$$\text{Ma } \lim_{x \rightarrow \infty} |f(X)| \geq \lim_{x \rightarrow \infty} |X| \quad (11)$$

e la funzione  $|X|$  diverge a  $\infty$  per cui anche

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(X)| = \infty$$

◆

Riassumendo,

*una funzione  $Y = f(X)$  continua e ALTA in tutto  $\mathbf{R}$  mantiene sempre lo stesso segno e, agli estremi del campo, è divergente a  $\pm \infty$*

Un esempio:

$Y = \sqrt{X^2 + 1}$  (vedi Fig. 10) è continua  $\forall X \in \mathbf{R}$

$|\sqrt{X^2 + 1}| > |X|$  si può elevare al quadrato per la positività dei due membri ottenendo

$$X^2 + 1 > X^2$$

che è sempre verificata. Dunque, la funzione è *ALTA*  $\forall X \in \mathbf{R}$

Inoltre è sempre positiva e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{X^2 + 1} = +\infty$$

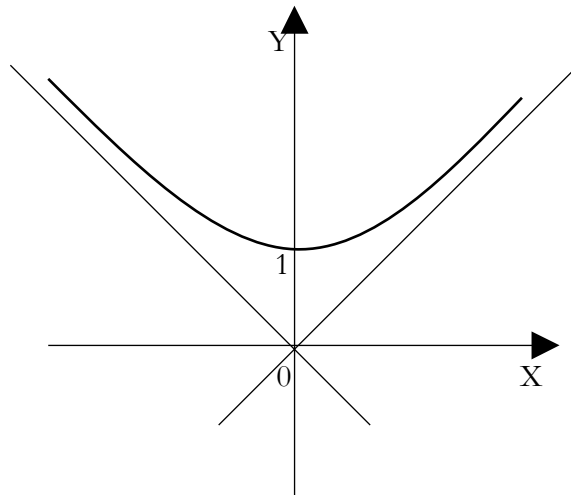


Fig. 10

#### BOX 4

##### QUADRO SINTETICO DELLA PROPRIETÀ PER LE FUNZIONI ELEMENTARI <sup>(12)</sup>

- A)  $Y = X^n$  ha punti *NEUTRI*  $X = -1, 0, 1$   
è *ALTA* per  $X < -1, X > 1$  è *BASSA* per  $-1 < X < 1, X \neq 0$
- B)  $Y = k/X$  ha punti *NEUTRI*  $X = \pm\sqrt{k}$  se  $k > 0$  e  $X = \pm\sqrt{-k}$  se  $k < 0$   
è *ALTA* per  $-\sqrt{k} < X < \sqrt{k}$  se  $k > 0$  e  $-\sqrt{-k} < X < \sqrt{-k}$  se  $k < 0$   
è *BASSA* per  $X < -\sqrt{k}, X > \sqrt{k}$  se  $k > 0$  e  $X < -\sqrt{-k}, X > \sqrt{-k}$  se  $k < 0$
- C)  $Y = a^X$  se  $0 < a < 1$  ha unico punto *NEUTRO*  $X = \alpha$  con  $0 < \alpha < 1$   
è *ALTA* per  $X < \alpha$  è *BASSA* per  $X > \alpha$   
se  $a > 1$  ha unico punto *NEUTRO*  $X = -\alpha$   
( $Y = e^X$ ) è *ALTA* per  $X > -\alpha$  è *BASSA* per  $X < -\alpha$  ( $\alpha \cong 0,567\dots$ )
- D)  $Y = \log_a X$  se  $0 < a < 1$  ha un unico punto *NEUTRO*  $X = \alpha$   
è *ALTA* per  $0 < X < \alpha$  è *BASSA* per  $X > \alpha$   
 $Y = \log_a X$  se  $a > 1$  ha un unico punto *NEUTRO*  $X = \alpha$   
( $Y = \ln X$ ) è *ALTA* per  $0 < X < \alpha$  è *BASSA* per  $X > \alpha$   
( $\alpha \cong 0,567\dots$ )
- E)  $Y = \sqrt{X}$  ha per punti *NEUTRI*  $X = 0, 1$   
è *ALTA* per  $0 < X < 1$  è *BASSA* per  $X > 1$
- F)  $Y = \text{sen } X$  ha un unico punto *NEUTRO*  $X = 0$   
è *BASSA* per tutti gli  $X \neq 0$
- G)  $Y = \text{cos } X$  ha per punti *NEUTRI*  $X = \beta, -\beta$   
con  $\pi/6 < \beta < \pi/4$  ( $\beta \cong 0,739\dots$ )  
è *ALTA* per  $-\beta < X < \beta$  è *BASSA* per  $X < -\beta, X > \beta$

## PARTE TERZA: L'ANALISI

Il problema che ci siamo posti a questo punto è il seguente:

*avendo a disposizione due funzioni **continue e ALTE** (o *BASSE*) in un certo intervallo, le funzioni che si possono ottenere come prodotto, o somma, o combinazione lineare e, in generale, come funzione composta delle due sarà ancora una funzione *ALTA* (o *BASSA*)?*

*E se ciò non fosse vero, quali condizioni supplementari si possono porre perché sia vero? E, ancora, tali condizioni possono essere le meno restrittive possibili?*

Naturalmente, uno studio completo della situazione richiede molto più tempo ed energie di quelle a nostra disposizione per cui vengono di seguito esposte conclusioni che appaiono parziali e sono sicuramente passibili di approfondimenti ulteriori.

CONTESTO : Siano  $Y = f(X)$  e  $Y = g(X)$  due funzioni a variabili reali, **continue** in uno stesso intervallo  $I$  ed **entrambe ALTE** (o *BASSE*) in  $I$

---

**TEOREMA 5:** Dati la funzione  $Y = f(X)$  continua e *ALTA* in un intervallo  $I$  ed un numero reale  $K$  non nullo, **se  $|K| > 1$**  la funzione  $Y = K f(X)$  risulta *ALTA* in  $I$

Data la funzione  $Y = f(X)$  continua e *BASSA* in un intervallo  $I$  ed un numero reale  $K$  non nullo, **se  $|K| < 1$**  la funzione  $Y = K f(X)$  risulta *BASSA* in  $I$

---

**Dim.:**

- Intanto, se  $K = -1$  (caso banale come  $K = 1$ ) la funzione  $Y = -f(X)$  risulta essere simmetrica (vedi BOX 5) rispetto all'asse X della funzione data e  $|-f(X)| = |f(X)|$ , per cui essa mantiene in tutti i punti la sua caratteristica di essere *ALTA* o *BASSA*.
- Si ha che  $|K \cdot f(X)| = |K| \cdot |f(X)| > |K| \cdot |X|$  perché per ipotesi la funzione  $f(X)$  è *ALTA*; se  $|K| > 1 \quad \forall X \neq 0$  risulta  $|K| \cdot |X| > |X|$  e quindi, per la proprietà transitiva, si ha la tesi  $|K \cdot f(X)| > |X|$ , cioè la funzione  $Y = K f(X)$  è *ALTA*  
 se  $|K| > 1$  e  $X = 0$  è un punto di I allora  $|K \cdot f(0)| > 0$  perché  $|f(0)| > 0$  in quanto per ipotesi la funzione è *ALTA* anche in 0
- Analogamente si dimostra l'ultima affermazione. ♦

### BOX 5

#### Simmetrie elementari per $Y = f(X)$

$Y = -f(X)$  è la funzione simmetrica di  $f(X)$  rispetto all'asse X

Se  $f(X) = f(-X)$  allora la funzione  $f(X)$  è simmetrica rispetto all'asse Y

Se  $f(-X) = -f(X)$  allora la funzione  $f(X)$  è simmetrica rispetto all'origine degli assi

Se applichiamo il teorema 5 alla famiglia di parabole  $Y = K X^2$ , poiché (come già visto precedentemente) la funzione  $Y = X^2$  risulta *ALTA*

$\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , ogni curva della famiglia con  $|K| > 1$  sarà ancora una funzione *ALTA* negli stessi intervalli.

Ma, analizzando più attentamente, si scoprono alcune particolarità.

Intanto, poiché ogni curva della famiglia è simmetrica rispetto all'asse Y, si può ragionare solo con gli  $X \geq 0$ . Inoltre, se  $K < 0$  si ottiene la parabola simmetrica rispetto all'asse X ed il ragionamento non cambia, per cui supponiamo anche che  $K > 0$ .

In queste condizioni, avremo che  $|KX^2| > |X|$  è vera (ossia la funzione è *ALTA*) quando è vera  $KX^2 > X$  o anche  $KX^2 - X > 0$  che ha per soluzioni ( $K$  è positivo) gli intervalli  $X < 0$  (che non ci interessa) e  $X > 1/K$ . Con un analogo ragionamento per gli  $X < 0$  si ha  $X < -1/K$

In conclusione, la famiglia di parabole è *ALTA* negli intervalli  $(-\infty, -1/K) \cup (1/K, +\infty)$  (vedi fig. 11), e questa è una condizione che può essere più o meno restrittiva di quella del teorema 5.

Ad esempio,  
 per  $K=1/2$  la parabola  $Y = 1/2X^2$  risulta *ALTA* in  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$   
 condizione più restrittiva di quella imposta dal teorema  
 per  $K=2$  la parabola  $Y = 2X^2$  risulta *ALTA* in  $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$   
 intervalli più ampi di  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  imposti dal teorema <sup>(13)</sup>.

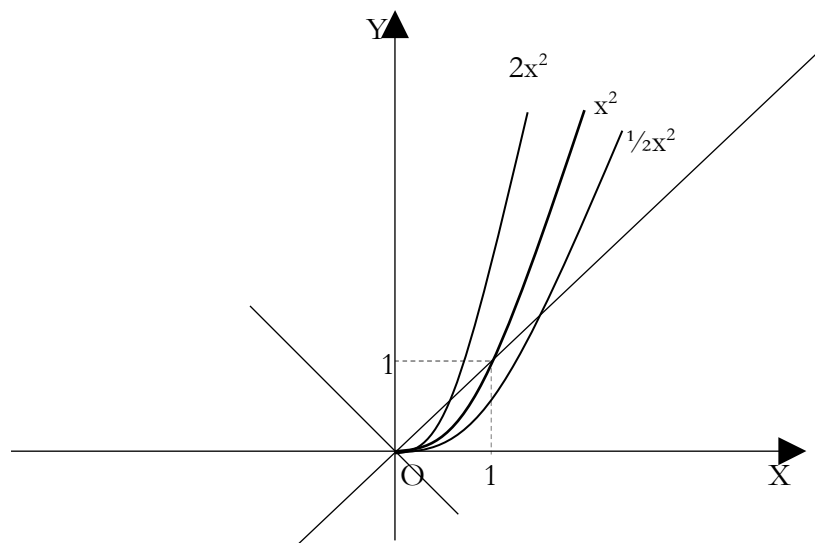


Fig. 11

Generalizzando, si arriva a dimostrare che:

la famiglia di potenze  $Y = a X^n$  è *ALTA* negli intervalli

$$(-\infty, -1/\alpha) \cup (1/\alpha, +\infty) \quad \text{con } \alpha = \sqrt[n-1]{|a|} \quad n > 2 \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

**Dim.:**

Se vogliamo che la funzione risulti *ALTA* deve essere verificata la condizione

$$|a X^n| > |X| \quad \text{che è equivalente a } |a| \cdot |X^n| > |X|$$

o anche  $|a| \cdot |X^{n-1}| > 1$  (con  $X \neq 0$ ) e ancora  $|X^{n-1}| > 1/|a|$

- se  $n$  è pari (ossia  $n-1$  è dispari) quest'ultima risulta:

$$\text{per } X > 0 \quad X^{n-1} > 1/|a|$$

$$\text{che è verificata nell'intervallo } X > 1/\sqrt[n-1]{|a|}$$

$$\text{per } X < 0 \quad -X^{n-1} > 1/|a| \quad \text{ossia } X^{n-1} < -1/|a|$$

$$\text{che è verificata nell'intervallo } X < -1/\sqrt[n-1]{|a|}$$

- se  $n$  è dispari (ossia  $n-1$  è pari) risulta:

$$\text{per ogni valore di } X \quad |X^{n-1}| = X^{n-1} > 1/|a|$$

$$\text{che è verificata nell'intervallo } X < -1/\sqrt[n-1]{|a|} \quad X > 1/\sqrt[n-1]{|a|}$$

In conclusione, **qualunque sia  $n$**  ( $n > 2$ ), la funzione è *ALTA* nell'intervallo della tesi.  $\blacklozenge$

**TEOREMA 6:** Date le funzioni  $Y = f(X)$  e  $Y = g(X)$  continue e *ALTE* in un punto  $X_0$ , se  $|X_0| > 1$  allora la funzione prodotto  $Y = f(X) \cdot g(X)$  risulta *ALTA* in  $X_0$ ; in altre parole  $X_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  è *condizione sufficiente* perché la funzione prodotto sia *ALTA*.

Date  $f(X)$  e  $g(X)$  continue e *BASSE* nel punto  $X_0$ , se  $|X_0| < 1$  allora la funzione  $Y = f(X) \cdot g(X)$  risulta *BASSA* in  $X_0$ .

**Dim.:**

Poiché le due funzioni risultano *ALTE* in  $X_0$  si può dire che  $|f(X_0)| > |X_0|$  e  $|g(X_0)| > |X_0|$ ; siccome i due membri delle disuguaglianze sono entrambi positivi, si può affermare che è vera la disuguaglianza che si ottiene moltiplicando membro a membro (vedi BOX 6), ossia

$|f(X_0)| \cdot |g(X_0)| > |X_0| \cdot |X_0|$  e, per la proprietà del valore assoluto,  $|f(X_0) \cdot g(X_0)| > |X_0|^2$

A questo punto la funzione prodotto risulterà sicuramente *ALTA* nei punti per i quali

$|X_0|^2 > |X_0|$  perché la proprietà transitiva della disuguaglianza porta a  $|f(X_0) \cdot g(X_0)| > |X_0|$ ; ma la disequazione

$$|X_0|^2 > |X_0|$$

come già visto per la funzione elementare  $Y = X^2$ , risulta verificata negli intervalli indicati dalla tesi.

Analoga dimostrazione, a disuguaglianze invertite, per la seconda parte della tesi. ♦

### BOX 6

#### Proprietà delle disuguaglianze

Siano  $a, b, c, d$  numeri reali **positivi** ;  
 se  $a > b$  e  $b > c$  allora risulta  
 $a > c$  (proprietà transitiva)  
 se  $a > b$  e  $c > d$  allora risulta  
 $a + c > b + d$  e  $a \cdot c > b \cdot d$

Verifichiamo con un esempio che la condizione di appartenenza all'intervallo  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  **non è necessaria** (vedi nota 13); a seconda delle funzioni scelte si possono trovare condizioni

meno restrittive.

Scegliamo le funzioni ormai familiari  $Y = X^2$  e  $Y = 2X$  che sono continue e *ALTE* nell'intervallo  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

La funzione prodotto è la funzione  $Y = 2X^3$  che, come dimostrato prima, risulta essere *ALTA* nell'intervallo

$$(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, +\infty)$$

che è più ampio di quello previsto dal teorema.

Sempre nelle ipotesi di due funzioni  $Y = f(X)$  e  $Y = g(X)$  continue e *ALTE*, preoccupiamoci ora di scoprire cosa si può dire della funzione somma.

Il significato grafico della definizione ed un minimo di intuito ci portano immediatamente ad affermare che, generalmente, **la funzione somma non risulta ALTA**. Come controesempio <sup>(14)</sup> banale basta assumere una funzione  $Y = f(X)$ , continua e *ALTA*, e la sua opposta  $Y = -f(X)$  (che è ancora continua e *ALTA*); la funzione somma sarà  $Y = 0$  che risulta sempre *BASSA* ( $X \neq 0$ ).

Pertanto la domanda diventa: sotto quali condizioni la funzione somma sarà *ALTA*?

Un primo risultato lo dà il teorema seguente:

---

**TEOREMA 7:** Date le funzioni  $Y = f(X)$  e  $Y = g(X)$  continue e *ALTE* e **concordi** <sup>(15)</sup> (entrambe positive o entrambe negative) in un intervallo  $I$  la funzione somma  **$Y = f(X) + g(X)$**  risulta *ALTA* in  $I$

---

**Dim.:**

Poiché le due funzioni risultano *ALTE* nell'intervallo  $I$ , si può dire che in ogni punto  $X$  di tale intervallo  $|f(X)| > |X|$  e  $|g(X)| > |X|$ ; se le funzioni sono concordi allora si può scrivere (vedi BOX 1) che  $|f(X) + g(X)| = |f(X)| + |g(X)|$  e, combinando con le prime due disuguaglianze,

$$|f(X) + g(X)| = |f(X)| + |g(X)| > |X| + |X| \geq |X|$$

In definitiva

$|f(X) + g(X)| > |X|$  <sup>(16)</sup> che è la definizione di *ALTA* per la funzione somma ◆

Vediamo, come al solito, un esempio di applicazione con due funzioni elementari del tipo *potenza*, ossia  $Y = X^3$  e  $Y = X^2$  che sappiamo essere continue e *ALTE* nell'intervallo  $(+1, +\infty)$  e che, in questo intervallo, risultano entrambe positive.

Il teorema precedente ci assicura che allora anche la funzione somma  $Y = X^3 + X^2$  sarà *ALTA* in tale intervallo.

Attraverso un controllo algebrico diretto si scopre ancora una volta che la disuguaglianza  $|X^3 + X^2| > |X|$  è verificata in un intervallo **più ampio**; infatti, se  $X > 0$  (come nell'intervallo stabilito) entrambi i termini della somma sono positivi e si può scrivere  $X^3 + X^2 > X$  o anche, dividendo tutto per  $X$  che è positivo e non nullo nell'intervallo scelto,  $X^2 + X - 1 > 0$

Essendo questa disequazione verificata per i valori esterni alle radici dell'equazione

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$X_{1,2} =$   $(X_2 \cong 0,618)$  l'intervallo in cui la funzione somma risulta *ALTA* è ancora una volta più ampio di quello previsto dal teorema, esattamente  $(X_2, +\infty)$

E' curioso andare a vedere cosa accade invece nell'intervallo  $(-\infty, -1)$  nel quale le due funzioni sono continue e *ALTE* ma **non sono concordi**.

$$|X^3 + X^2| > |X| \text{ diventa } |X^2(X + 1)| > |X| \text{ e quindi } |X^2| \cdot |(X + 1)| > |X|$$

Poiché stiamo valutando valori negativi di  $X$  e minori di  $-1$ , quest'ultima diventa

$$X^2(-X - 1) > -X$$

o anche  $-X^3 - X^2 + X > 0$

e, dividendo per  $-X$  (che è positivo e non nullo!)

$$X^2 + X - 1 > 0$$

che è la stessa disequazione di prima. L'intervallo di soluzioni che ci interessa, e dove la funzione somma risulta ancora *ALTA*, è però questa volta **più ristretto**, più precisamente  $(-\infty, -X_1)$

dove  $X_1 \cong -1,618$

In figura 12 sono rappresentate le due funzioni  $Y = X^3$  e  $Y = X^2$  e gli intervalli (più spessi) dove la funzione somma rimane *ALTA*, cioè  $(-\infty, X_1)$  e  $(X_2, +\infty)$

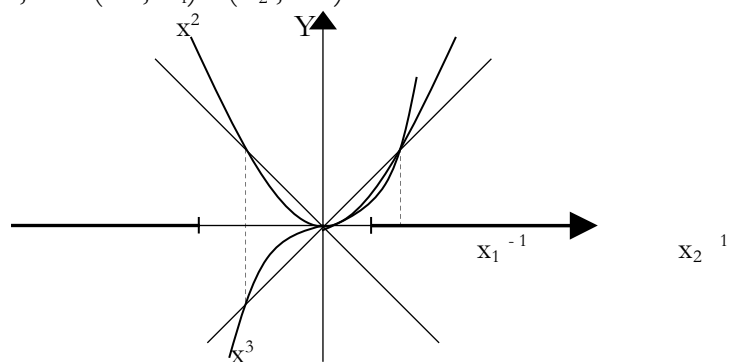


Fig. 12

Vediamo infine cosa si può concludere se facciamo la **composizione** di due funzioni *ALTE*

---

**TEOREMA 8:** Siano  $Z = g(X)$  e  $Y = f(Z)$  due funzioni a variabili reali rispettivamente di dominio  $Dg$  e  $Df$ . Se nel punto  $X_0 \in Dg$  la funzione  $g$  risulta *ALTA* e in  $Z_0 = g(X_0) \in Df$  la funzione  $f$  è anch'essa *ALTA* allora la funzione composta  $Y = f(g(X))$  risulta *ALTA* nel punto  $X_0$

---

**Dim.:**

Poiché per ipotesi la funzione  $g$  è *ALTA* nel punto  $X_0$  sappiamo che  $|Z_0| = |g(X_0)| > |X_0|$  ;

ma anche la funzione  $f$  è *ALTA* nel punto  $Z_0$  per ipotesi, per cui vale

$$|f(Z_0)| = |f(g(X_0))| > |Z_0| .$$

Per la proprietà transitiva della disuguaglianza possiamo allora concludere che

$$|f(g(X_0))| > |X_0|$$

condizione che, per definizione, ci assicura che la funzione composta è *ALTA* nel punto  $X_0$  ♦

L'apparente semplicità del teorema della funzione composta cela in verità alcuni passaggi delicati che appaiono più nitidi quando si cerca di applicarlo.

In primo luogo, è fondamentale che la scelta del punto  $X_0$  all'interno del dominio di  $g(X)$  sia tale che  $Z_0 = g(X_0)$  appartenga al dominio della funzione  $f(Z)$ ; senza tale corretta concatenazione non è assicurata l'esistenza della funzione composta (vedi BOX 7) e, di conseguenza, non avrebbe senso l'attributo di *ALTA*. In altre parole, il dominio della funzione composta può essere un sottinsieme proprio del dominio della funzione  $g(X)$ .

Ancora, la condizione che la funzione  $f(Z)$  sia *ALTA* è da imporre non tanto al dominio della funzione  $f(Z)$ , ma al suo sottinsieme individuato dall'intersezione del suo dominio col codominio della funzione  $g(X)$ .

Infine, la condizione che  $f(Z)$  sia *ALTA* nel punto  $Z_0$  è una condizione **sufficiente** ma **non necessaria** come si può vedere nell'esempio che segue.

In conclusione, nella funzione composta l'analisi della proprietà di essere *ALTA* in un punto, e la conseguente estensione ad un **intervallo di punti**, impone molte delle difficoltà che si

incontrano nello studio del dominio e delle altre caratteristiche usuali. <sup>(17)</sup>

Per finire la trattazione di quest'ultimo argomento vediamo due esempi di funzione composta e di come si debba fare attenzione nell'applicazione del teorema alle condizioni sopra citate.

**Es. 1:**

La funzione  $Z = g(X) = X^2 + 1$  (vedi Fig. 13) ha per dominio tutto  $\mathbf{R}$  e per codominio l'intervallo  $[1, +\infty)$

Risulta *ALTA* in tutto il suo dominio

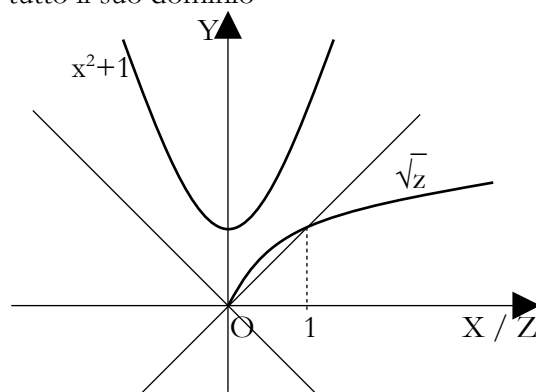


Fig. 13

La funzione  $Y = f(Z) = \sqrt{Z}$  (vedi Fig. 13) ha per dominio  $\mathbf{R}^+$  (0 incluso) che quindi **comprende anche il codominio di g** e ha per codominio  $[0, +\infty)$

Risulta *ALTA* nell'intervallo  $(0, 1)$

La funzione composta  $Y = \sqrt{X^2 + 1}$  ha per dominio tutto  $\mathbf{R}$  e per codominio  $[1, +\infty)$  (vedi Fig. 10)

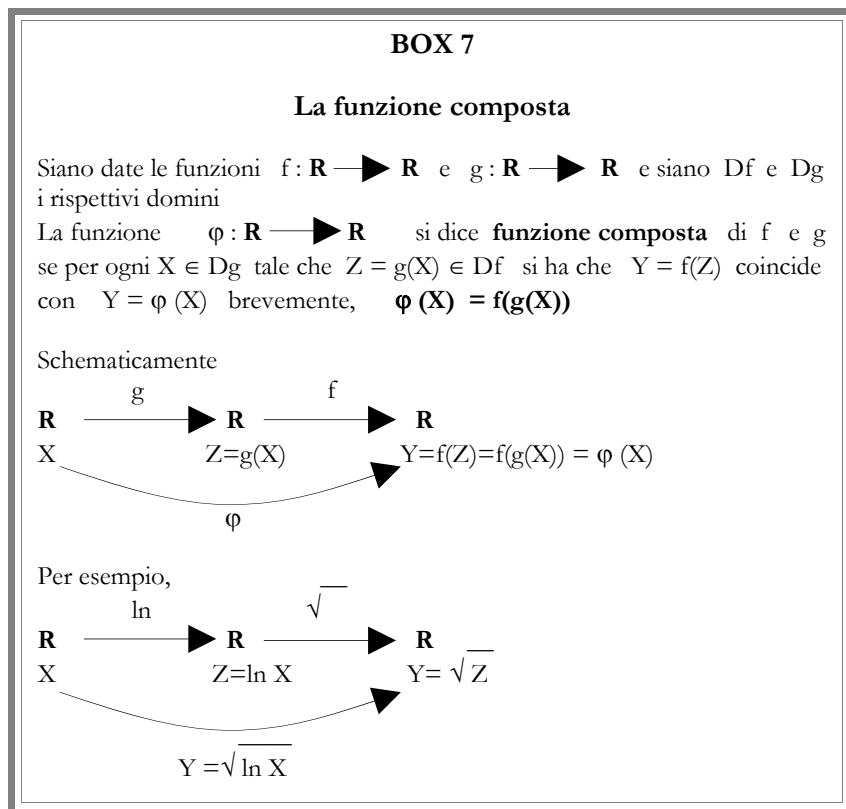
Poiché per ogni  $X$  appartenente a  $\mathbf{R}$  si ha che  $g$  è *ALTA* e  $Z = g(X)$  appartiene al dominio di  $f$ , e poiché per ogni  $Z$

appartenente all'intervallo  $(0, 1)$  la funzione  $f$  è *ALTA*, il teorema ci assicura che la funzione composta è *ALTA* in tutti i punti  $X$  tali che  $g(X)$  appartenga all'intervallo  $(0, 1)$ ; in realtà **nessun valore di  $g(X)$  appartiene all'intervallo  $(0, 1)$**  e, pur tuttavia, **la funzione composta è *ALTA* in tutti i punti di  $\mathbf{R}$ !** (vedi pag. 22)

Questo significa, ancora una volta, che le condizioni imposte nelle ipotesi del teorema sono sufficienti ma **non tutte necessarie** per la verità della tesi.

Es. 2: <sup>(18)</sup>

La funzione  $Z = g(X) = -\frac{1}{2}X^2$  (vedi Fig. 14) ha per dominio tutto  $\mathbf{R}$  e per codominio l'intervallo  $(-\infty, 0]$   
 Risulta *ALTA* nell'intervallo  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

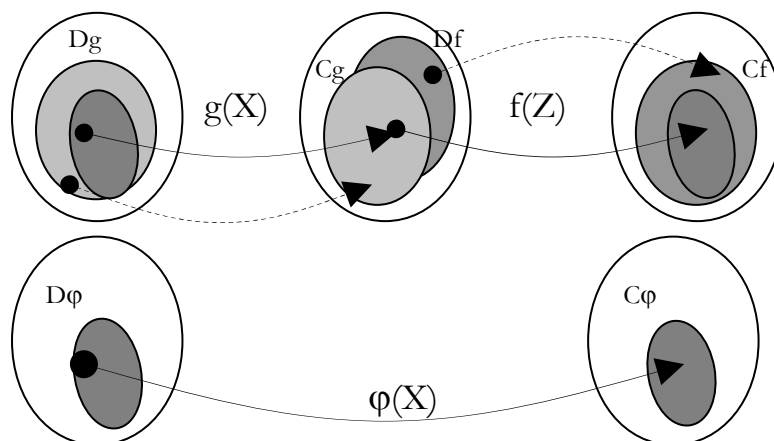


## BOX 7

### La funzione composta

Il dominio della funzione composta può essere un sottinsieme proprio del dominio della funzione  $g(X)$ . Nell'esempio, il dominio di  $\ln X$  è l'insieme dei numeri reali positivi  $\mathbf{R}^+$  (zero escluso), ma il dominio di  $\varphi(X)$  è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1 (l'esistenza della radice quadrata è assicurata solo se  $\ln X \geq 0$  ossia  $X \geq 1$ ) e dunque un sottinsieme proprio di  $\mathbf{R}^+$

In un diagramma di Venn



$D_f, D_g, D_\varphi$  sono rispettivamente il dominio delle funzioni  $f, g, \varphi$   
 $C_f, C_g, C_\varphi$  sono rispettivamente il codominio delle funzioni  $f, g, \varphi$

La funzione  $Y = f(Z) = e^Z$  (vedi Fig. 14) ha per dominio tutto  $\mathbf{R}$  (e quindi **comprende anche il codominio di g**) e ha per codominio  $(0, +\infty)$

Risulta *ALTA* nell'intervallo  $(-\alpha, +\infty)$  con  $\alpha \cong 0,567$

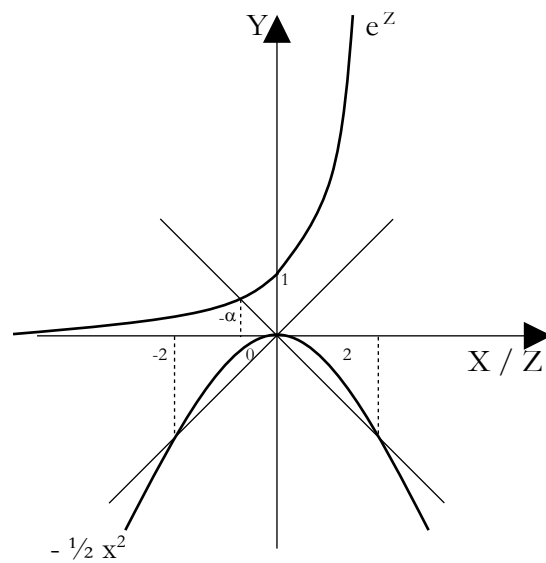


Fig. 14

La funzione composta (vedi nota 18)  $Y = e^{-1/2 x^2}$  ha per dominio tutto  $\mathbf{R}$  e risulta *ALTA* nell'intervallo  $(-\beta, \beta)$  con  $\beta \cong 0,753$  (vedi Fig. 15)

Come si può notare l'applicazione del teorema 8 **sembra non funzionare** se si considera l'intervallo  $(2, +\infty)$  dove le funzioni sono entrambe *ALTE*.



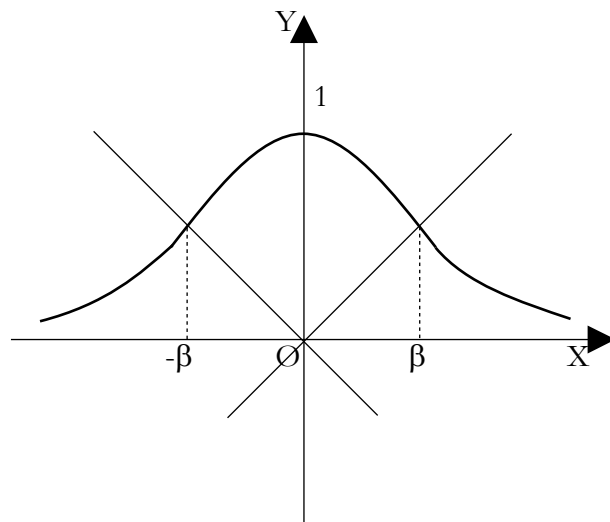
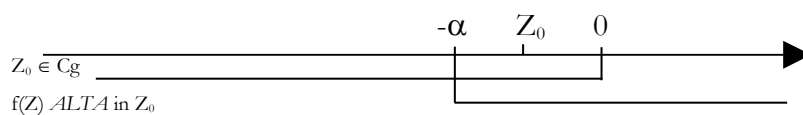


Fig. 15

Ad una analisi più attenta, si vede che, in realtà, la funzione  $f(Z)$  **non è ALTA in tutto il codominio di  $g(X)$ !** Per questo motivo, scelto un  $X_0$  nell'intervallo  $(2, +\infty)$  non è detto che in  $Z_0 = g(X_0)$  la funzione  $f(Z)$  sia *ALTA* in quanto  $Z_0 \in (-\infty, 0]$  mentre  $f(Z)$  è *ALTA* solamente nell'intervallo  $(-\alpha, 0]$ ; viene a mancare pertanto una delle ipotesi del teorema!

Nel caso in cui  $Z_0$  appartenga all'intervallo  $(-\alpha, 0]$ , intersezione tra il codominio di  $g(X)$  e l'intervallo  $(-\alpha, +\infty)$  in cui  $f(Z)$  è *ALTA*, si può applicare il teorema della funzione composta e concludere che la funzione di Gauss è *ALTA* nel punto  $X_0$ .



## NOTE DIDATTICHE

1. La scelta dell'aggettivo NEUTRI in riferimento ai punti in cui la funzione viene ritenuta né *ALTA* né *BASSA* è stata motivo di discussione nel gruppo sulla base di tre proposte:
  - EQUIQUOTATI, proposta dell'insegnante in quanto vocabolo "nuovo" e legato al significato grafico degli altri due
  - MEDI, proposta di alcuni studenti e ritenuta poi dal gruppo ambigua nel significato e passibile di confusione col punto medio di un segmento
  - NEUTRI, proposta di altri studenti che è stata condivisa dal gruppo in quanto di più facile accezione
2. L'insegnante ha fatto notare e discutere gli studenti su come alcune definizioni *nascono* riferite ad un punto e poi sono estese ad un intervallo (come funzione POSITIVA o *ALTA*) mentre per altre occorre da subito l'ambiente di un intervallo (come funzione CONTINUA o CRESCENTE)
3. Per la prima volta in questo lavoro, viene evidenziata la necessità di dimostrare anche le affermazioni evidenti o ben metabolizzate dagli studenti
4. In un primo momento, agli studenti appariva necessario distinguere le coordinate dei due punti a seconda che  $K > 0$  o  $K < 0$ . La verifica che le coordinate di  $A(-K, K)$  e  $B(K, K)$  esprimono in modo algebricamente corretto i due casi è stato motivo di soddisfazione del gruppo
5. E' stato ritenuto inutile appesantire l'esposizione con la verifica algebrica della disequazione ritenuta sufficientemente "facile" dagli studenti
6. In questo caso, l'insegnante ha "preteso" la dimostrazione sia per la verifica della correttezza logica e formale di un teorema

"sconosciuto", sia per evidenziare la difficoltà di utilizzare un linguaggio rigoroso

7. L'analisi che segue è risultata molto utile dal punto di vista didattico
  - per riaffermare la necessità di una logica rigida
  - per dar modo agli studenti di utilizzare con sicurezza le loro conoscenze e capacità e, di conseguenza, rinforzarne positivamente il coinvolgimento
  - per preparare gli strumenti necessari alla dimostrazione del teorema 2, primo teorema significativo della trattazione
8. E' a questo punto che è risultato necessario introdurre alcune pause nello svolgimento dei lavori per "riesumere" alcune conoscenze degli studenti, nella fattispecie la risoluzione di equazioni e disequazioni binomie. Questo ha portato all'idea di utilizzare i BOX nella stesura.
9. La scelta di analizzare i casi partendo dalla positività di  $X$ , e poi distinguendo il grado in pari e dispari, è venuta "naturale" agli studenti per cui è stata rispettata nell'esposizione e privilegiata rispetto alla scelta inversa
10. Questo tema è stato proposto dall'insegnante perché rappresenta un significativo passo in avanti nell'astrazione della ricerca, in quanto si passa da funzioni note a funzioni generiche. Da rilevare che le affermazioni dei due teoremi sono ancora intuitive se affrontate dal punto di vista grafico. E' stata colta l'occasione per rivisitare le dimostrazioni per assurdo e alcuni teoremi di analisi studiati.
11. E' stato fatto notare agli studenti come nel passaggio al limite la disuguaglianza da stretta diventi debole in quanto, pur restando una funzione sempre superiore all'altra, le due funzioni potrebbero avere lo stesso limite.

12. Il valore di  $\alpha$  per le funzioni  $Y = e^X$   $Y = \ln X$  è stato calcolato nei suoi primi decimali con procedimento di calcolo iterativo utilizzando una calcolatrice tascabile. Non essendo le funzioni goniometriche inserite nel programma studiato, la sintesi per  $Y = \sin X$   $Y = \cos X$  ed il calcolo di  $\beta$  sono stati eseguiti dall'insegnante.
13. A questo punto, stimolata anche dall'insegnante, è sorta nel gruppo la necessità di rivisitare il concetto di condizione necessaria e/o sufficiente, condizione logica mai abbastanza metabolizzata dagli studenti, che verrà esplicitata nel successivo teorema n. 6
14. Anche in questo caso è stato riaffermato nel gruppo il concetto che per negare una affermazione basta citare un caso in cui non è vera.
15. Come è facile immaginare, l'intuizione che il teorema vale per funzioni con lo stesso segno è sorta nel gruppo addirittura prima della confutazione con il controesempio esposto.
16. L'insegnante ha fatto notare come la necessaria disuguaglianza debole finale della catena precedente non inficia la disuguaglianza forte della conclusione.
17. Il gruppo ha lavorato molto per recuperare il concetto profondo di funzione composta e per analizzare i casi possibili di applicazione del teorema alle funzioni conosciute.
18. Questo esempio è stato proposto dall'insegnante non solamente per il sottile inganno che può indurre negli studenti, ma soprattutto per l'importanza che la funzione di Gauss standardizzata assume nel programma di statistica che gli alunni affronteranno nella classe quinta. Sarebbe interessante studiare se il valore di  $\beta$  assume qualche significato particolare nella distribuzione di probabilità normale che la funzione *a campana* rappresenta. Per favorire la semplicità dell'esempio è stata omessa la costante moltiplicativa della funzione  $1/\sqrt{2\pi}$